medika 作成　数学　解・答・速・報　　昭和大学（Ｉ）医学部　入学試験　　2009 年 1 月 25 日実施

平成 21 年 1 月 25 日　昭和大学Ｉ期　　数学入学試験問題

1　次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

(1)　次の数列は，分母が 2 のべき乗で分子が奇数の分数（<1）を並べたものである。

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \cdots$$

(1-1)　この数列の第 100 項を求めよ。

(1-2)　この数列の初項から第 100 項までの和を求めよ。

(2)　$0 \le x < 2\pi$ とする。次の連立不等式を解け。

$$0 \le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{3}\cos x \le 1$$

(3)　x の方程式 $\log_a(x-1)+\log_a(4-x) = -2$ が解をもつような実数 a のとりうる値の範囲を求めよ。

(4)　x の方程式 $x\sqrt{x} - m\sqrt{x} + 1 = 0$ が相異なる 2 つの実数解をもつための，実数 m のとりうる値の範囲を求めよ。

(5)　$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$$a_n = \sqrt[n]{\left(1+2\cdot\frac{1}{n}\right)\left(1+2\cdot\frac{2}{n}\right)\left(1+2\cdot\frac{n}{n}\right)}$$

とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

2　実数 a は不等式 $0 \le a \le 1$ を満たすものとする。また，実数 t に対し，放物線 $y = -x^2 + 1$ 上の点 $(t, -t^2+1)$ における接線を l とし，点 $(a, 0)$ から l までの距離を d とする。

(1)　d を求めよ。

(2)　$d = f(t)$ とおく。t がすべての実数を変わるとき，関数 $f(t)$ の導関数 $f'(t)$ を求めよ。

(3)　t がすべての実数を変わるとき，関数 $f(t)$ が極大となる t の値の個数，および極小となる t の値の個数をそれぞれ求めよ。

3　次の各問に答えよ。ただし，答は結果のみ解答欄に記入せよ。

(1)　$\sqrt{7}+12$ の整数部分を x，小数部分を y とする。$x - \dfrac{3}{y}$ の整数部分の値を求めよ。

(2)　72^n（n は自然数）の正の約数の個数がちょうど $13n+111$ に等しいとする。n の値を求めよ。

(3)　半径 r の 4 個の小球が互に外接している。次の各問に答えよ。

(3-1) 各小球の中心を 4 つの頂点とする正三角錐の体積を求めよ。

(3-2) 4 個の小球が内接する球の半径を求めよ。

(4)　△ABC の頂点 A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ とする。また辺 BC，CA，AB をそれぞれ $m:n$ に内分する点を P，Q，R とする。ただし，m，n は正の数とする。次の各問に答えよ。

(4-1) 点 P の位置ベクトルを $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いて表せ。

(4-2) △PQR の重心を G とする。点 G の位置ベクトルを $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ 用いて表せ。

4　次の『』の文章を読み，以下の問(1)～(5)に答えよ。ただし，答は結果のみを解答欄に記入せよ。

『下図のように，4 つの水路①～④で結ばれた 4 つの池Ａ～Ｄがある。池の高さの違いにより，池Ａの水は水路①を経て池Ｂに流れ込み，続いて 2 つの水路②および④を経て流れる。水路②を通った水は池Ｃに流れ込み，さらに水路③を経て池Ｄに到達する。また，水路④を通った水は池Ｄに直接流れ込む。なお，水量が十分にあるとき，各池に流れ込んだ水は下流に流れてもその一部は池に残る。

4 つの水路にはそれぞれ途中に水門があり，水門が閉じているとき水は下流に流れない。各水門の開閉は互いに独立に定まり，水路①～④の各水門が開いている確立はそれぞれ $p_1 \sim p_4$（いずれも 0 以上 1 以下の実数）である。

今，4 つの池に水が無いことを確認した後，池Ａに十分な量の水を注ぎ込むとする。』

(1)　水が池Ｃに流れ込む確率を求めよ。

(2)　水が池Ｄに流れ込む確率を求めよ。

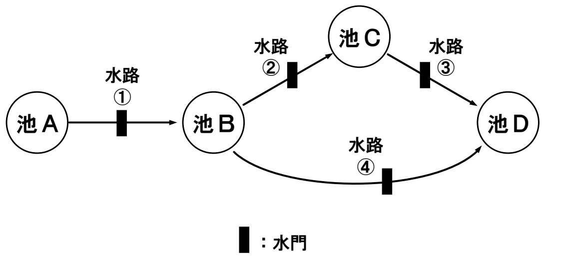
(3)　$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$ とする。次の各条件付確率を求めよ。

(3 - 1)　池Ｄに水が到達しているとき，池Ｃに水が流れ込んでいる確率。

(3 - 2)　池Ｄに水が到達していないとき，池Ｃに水が流れ込んでいる確率。

(4)　$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$ とする。水路②か水路④のどちらか一方のみを通って水が池Ｄに到達する確率を求めよ。

(5)　(4)の確率が最大となる p の値を求めよ。



medika作成　数学　解・答・速・報　昭和大学（Ⅰ）医学部　入学試験

2009年 1月 25日実施

平成 21 年 1 月 25 日　昭和大学Ⅰ期　　数学入学試験解答

$\boxed{1}$ (1) (1-1) 分母が同じものを群とすると，第 100 項は第 7 群 37 番目となるので $\underline{\dfrac{73}{128}}$

(1-2) 第 n 群全体の和は 2^{n-2} と表され，第 7 群の第 100 項までの和は，

$\dfrac{1+3+\cdots+73}{128}=\dfrac{1369}{128}$ より全体の和は，$\underline{\displaystyle\sum_{k=1}^{6}2^{k-2}+\frac{1369}{128}=\frac{5401}{128}}$

(2) $0\le 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-2\sqrt{3}\cos x\le 1 \Rightarrow 0\le\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\le\dfrac{1}{2}$ より $\underline{\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2},\quad \dfrac{7}{6}\pi\le x\le\dfrac{4}{3}\pi}$

(3) 方程式を整理すると，$x^2-5x+4+\dfrac{1}{a^2}=0$ となり，真数条件の範囲に解を持つ条件を調べればよい。

最後に底の条件を加えて $\underline{\dfrac{2}{3}\le a<1,\quad 1<a}$

(4) $\sqrt{x}=t$ として，$m=t^2+\dfrac{1}{t}$ を微分してグラフを描くことにより，$m>\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

(5) $\log a_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{2k}{n}\right)$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=\int_0^1\log(1+2x)dx=\log\frac{3\sqrt{3}}{e}$

よって $\underline{\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3\sqrt{3}}{e}}$

$\boxed{2}$

(1) $2tx+y-(t^2+1)=0$ と点 $(a,0)$ の距離 d は $\underline{d=\dfrac{t^2-2at+1}{\sqrt{4t^2+1}}}$

(2) $\underline{f'(t)=\dfrac{2(2t^3-t-a)}{(4t^2+1)\sqrt{4t^2+1}}}$

(3) $f'(t)=0\Leftrightarrow 2t^3-t=a$

$g(t)=2t^3-t$ として，$u=g(t)$ と $u=a$ の上下関係を調べることによって，

$0\le a<\dfrac{\sqrt{6}}{9}$ のとき，極大となる t の個数は 1 個，極小となる t の個数は 2 個

$\dfrac{\sqrt{6}}{9}\le a\le 1$ のとき，極大となる t の個数は 0 個，極小となる t の個数は 1 個

$\boxed{3}$ (1) $14<\sqrt{7}+12<15$ より，$x=14,\ y=\sqrt{7}-2$ となる。よって $x-\dfrac{3}{y}=12-\sqrt{7}$ より，

整数部分は $\underline{9}$

(2) $72^n=2^{3n}3^{2n}$ より，約数の個数は $(3n+1)(2n+1)$ 個

これが $13n+111$ に等しいとして，$\underline{n=5}$

(3) (3-1) 一辺の長さ $2r$ の正四面体の体積だから，$\underline{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}r^3}$　　(3-2) $\underline{\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}r}$

(4) (4-1) $\underline{\dfrac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}}$　　(4-2) $\underline{\vec{g}=\dfrac{1}{3}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}}$

$\boxed{4}$

(1) 水路①と②が両方開いている確率を求めればよく，$\underline{p_1p_2}$

(2) ①が開いた状態で，④もしくは②&③が開いていればよいから

$\underline{p_1(p_2p_3+p_4-p_2p_3p_4)}$

(3)

(3-1) C と D の両方に水が到達している確率は，開いている水門が①②③④，①②④，①②③の 3 通りで $-p^4+2p^3$ である。これを(2)の答えで割って

$\underline{\dfrac{-p^2+2p}{-p^2+p+1}}$

(3-2) C に到達し，D に到達しないのは開いている水門が①②のとき。この確率は $p^2(1-p)^2$ であり，(2)の答えの余事象で割って $\underline{\dfrac{-p^3+p^2}{-p^3+p+1}}$

(4) 開いている水門が①②③，①②④，①③④，①④の場合を考えて，求める確率は

$\underline{-2p^4+p^3+p^2}$ （$f(p)$とおく）

(5) $f'(p)=-8p^3+3p^2+2p$ より，増減表から，$\underline{p=\dfrac{3+\sqrt{73}}{16}}$

講評

$\boxed{1}$ いずれも標準的な問題であるが，計算が面倒なものが多い。

$\boxed{2}$ $f'(t)$ の計算が複雑であり，(3)につながるので慎重にしたい。

$\boxed{3}$　いずれも標準的な問題である。(3-2)では求める球の中心が，(3-1)の四面体の重心であることに気づくと速い。

$\boxed{4}$　(3)の条件付確率は定義をしっかり理解しておくこと。ベン図を描くと分かりやすくなる。

全体の講評

全体的にタフな計算力，要領の良さを要求されている。合格ラインは８割程度か。

medika 数学科