[1]

(1)

$f(x)$が$(x^2+1)^2$で割り切れるとき、$f(x)=(x^2+1)^2 g(x)$とおける。ただし、$g(x)$は実係数の整式。
これより$f(x)$，$f'(x)$を計算して$x=i$を代入すると、$f(i)=0, f'(i)=0$となる。逆に$f(i)=0, f'(i)=0$のとき、
$f(x)=(x^2+1)^2 h(x)+(ax+b)(x^2+1)+cx+d$ とおく。ただし、$h(x)$は実数係数の整式、a,b,c,d は実数。これより $f'(x)$を求め、$f(i)=0$， $f'(i)=0$を解くと$a=b=c=d=0$となり、$f(x)$は$(x^2+1)^2$で割り切れる。

(2)

$(x-1)g(x)=x^4(x^{m+1}-1)-(x^{n+1}-1)$　　$(=h(x)$とおく）

$(x-1)g'(x)+g(x)=h'(x)$より、$g(i)=g'(i)=0 \Leftrightarrow h(i)=h'(i)=0$

$h(i)=0 \Leftrightarrow i^{m+1}=i^{n+1} \Leftrightarrow m\equiv n \cdots$①

$h'(x)=(m+5)x^{m+4}-4x^3-(n+1)x^n$ より、

$h'(i)=0 \Leftrightarrow (m+5)i^m+4i-(n+1)i^n=0\cdots$②

①の下で、$m\equiv 0$，２のとき②の左辺の虚の部が消えないので不適。

（ア）$m\equiv 1$ のとき、②より$n=m+8$、

（イ）$m\equiv 3$ のとき、②より$n=m$

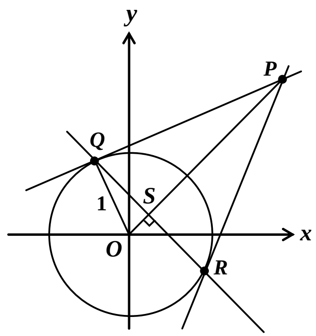
①より、求める必要十分条件は$(m,n)=(4k+1,\ 4k+9)\ or\ (4k+3,\ 4k+3)$
（k：非負整数）

ただし，自然数p,qが 4 で割った余りが等しいとき　$p\equiv q$と書いた。

[2]

(1)

OS$=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$



(2)

OS⊥QR より、直線 OS：$bx-ay=0$。
これと直線ℓとの交点を求めて、

$S\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$

(3)

O, S, P はこの順に同一直線にあり、△PQO∽△QSO である。OP：OQ=OQ：OS より、OP：1=1：$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　∴OP=$\sqrt{a^2+b^2}$ となり、$\overrightarrow{OP}=(a^2+b^2)\overrightarrow{OS}$

(4)

(2)(3)の結果より$\overrightarrow{OP}=(a\ ,b)$　　∴　P(a,b)

[3]

(1)

$\overrightarrow{ER}=\left(\dfrac{4}{3},2,-\dfrac{2}{3}a\right)$より，$\overrightarrow{ER}$の正射影は$\left(\dfrac{4}{3},2\right)$

(2)

$\overrightarrow{EP}=(-2t,t-2,-a)$，$\overrightarrow{EQ}=(0,0,-as)$で与式の正射影ベクトルを比較して$\left(\dfrac{4}{3}\cdot 2\right)=k(-2t,t-2)+(1-k)(0,0)$　∴$k=-\dfrac{4}{3}, t=\dfrac{1}{2}$

(3)

(2) より，$\overrightarrow{ER}=-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{ER}+\dfrac{7}{3}\overrightarrow{EQ}$で，$z$成分を比較して，

$-\dfrac{2}{3}a=\dfrac{4}{3}a-\dfrac{7}{3}as$，$a>0$より　　$s=\dfrac{6}{7}$

[4]

(1)

$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+a)}{x}$ よって $f(x)$ の増減表より極小値 $f(1)=\underline{a-\dfrac{1}{2}}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

(2)

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=\infty$ と $y=f(x)$ のグラフを用いて， $f(x)=0$ の解の個数は，

$\underline{a>\dfrac{1}{2}\text{のとき0個},\quad a=\dfrac{1}{2}\text{のとき1個},\ 0<a<\dfrac{1}{2}\text{のとき2個}}$

(3)

$\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\frac{1}{6}\times\frac{7}{64}+\frac{1}{2}(a-1)\times\frac{3}{16}+\frac{1}{4}a=0$ より $\underline{a=\dfrac{29}{132}}$

[5]

(1)

A が k 回戦に勝ち上がる確率は a^{k-1}，B についても同様なので，求める確率は　$a^{k-1}\cdot a^{k-1}=\underline{\underline{a^{2k-2}}}$

(2)

B が k 回戦より前に負ける確率は $1-a^{k-1}$ より，求める確率は $\underline{\underline{a^{k-1}(1-a^{k-1})}}$

(3)

k 回戦で A と B が，対戦して A が優勝する場合と，対戦せずに A が優勝する場合に分けて考えると，求める確率は

$a^{2k-2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot a^{n-k}+a^{k-1}\left(1-a^{k-1}\right)\cdot a\cdot a^{n-k}=\underline{\underline{\dfrac{1}{2}a^{n}\left\{(1-2a)a^{k-2}+2\right\}}}$

講評

〔1〕(1)　$f(x)$ を $(x^2+1)^2$ で割った余りを $(ax+b)(x^2+1)+cx+d$ とおくこと。

(2)　$g(x)$ の代わりに，$h(x)=(x-1)g(x)$ の条件を考えることにより計算が大幅に楽になる。しかし，難問である。

〔2〕極と極線の有名問題。方程式，ベクトルを使うか，図形的考察を用いるか，適切に判断して要領よく解きたいところ。

〔3〕見た目は複雑だが落ち着いて計算すれば易しい問題である。

〔4〕標準的な問題。これもしっかり得点したい。

〔5〕問題文に文字定数が多く，戸惑ったかもしれないが，落ち着いてやればこれも決して難しくはない。(1)・(2) は，答えに n が入らず，焦った生徒もいるかもしれないが気にしないこと。

全体講評

medika 大阪医科大学（後）直前講習において，前期と同じ 5 題の出題であり，またその 5 題中 1 題が空間ベクトル，1 題が微分積分，1 題が確率からの出題と予想したが予想が的中した。講習会受講生は落ち着いて試験が受けられたであろう。今年から後期も記述式に変更され，昨年と比較して分量はやや増加，難易度は〔1〕の分だけ上がった，と言える。合格の為には，〔3〕・〔4〕・〔5〕を完答して，〔1〕・〔2〕で部分点を稼いで，80％程度は取りたい。

medika 数学科