〔1〕

$A=a\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix}$ で, $B=\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&1\\-2&2\end{pmatrix}$ とおくと

$BC=CB=0$, $B^2=B$, $C^2=C$ なので

$$A^n=(aB-C)^n=a^nB+(-1)^nC=\begin{pmatrix}2a^n-(-1)^n & -a^n+(-1)^n\\ 2a^n-2\cdot(-1)^n & -a^n+2\cdot(-1)^n\end{pmatrix}$$

〔2〕

(1)　$0\le f\left(\frac{1}{2}\right)\le1$ より, $0\le\frac{a}{4}-1\le1$　$\therefore 4\le a\le 8$

(2)　(1)より, $4\le a\le8$ が必要。ここで, $f'(x)=(2x-1)(6x-a+3)$ であり,

$\frac{1}{6}\le\frac{a-3}{6}\le\frac{5}{6}$ より, $0\le f\left(\frac{a-3}{6}\right)\le1$ となればよい。

$\therefore 0\le\frac{(a-3)^2(12-a)}{108}\le1$

しかしこれは, $4\le a\le8$ において成立する。よって $4\le a\le8$

〔3〕

(1)　$1-x^2>0$ より示すべき不等式 $2(1+x^2)\le\frac{2}{1-x^2}$ かつ $\frac{2}{1-x^2}\le2(1+x^2)+\frac{x^2}{4}$

は $(1+x^2)(1-x^2)\le1$ かつ $8\le8(1+x^2)(1-x^2)+x^2(1-x^2)$ すなわち,

$-x^4\le0$ かつ $x^2(9x^2-1)\le0$ と同値であるが, $0\le x^2\le\frac{1}{9}$ より成立する。

よって示された。

(2)（1）より, $\int_0^{\frac{1}{3}}2(1+x^2)dx\le\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx\le\int_0^{\frac{1}{3}}\left\{2(1+x^2)+\frac{x^2}{4}\right\}dx$

（左辺）$=\frac{56}{81}$　(中辺) $=\log2$　(右辺) $=\frac{56}{81}+\frac{1}{324}$ となり, 題意は示された。

〔4〕

(1)　${}_pC_k=\frac{p(p-1)\cdots\cdots(p-k+1)}{k!}$ は整数であり, $k!\,{}_pC_k=p(p-1)\cdots\cdots(p-k+1)$

ここで,右辺は p の倍数で, $k<p$ より, $k!$ は p の倍数でない。$\therefore$ ${}_pC_k$ は p の倍数。

(2)　$A=(m+n)^p-m^p-n^p=\sum_{K=1}^{p-1}{}_pC_km^{p-k}n^k$ で,（1）より ${}_pC_k\ (k=1,2,\cdots,\ p-1)$ が全て p で割り切れるから, A もそうである。また, m, n, $m+n$ の偶奇と m^p, n^p, $(m+n)^p$ の偶奇はそれぞれ一致するので, $A=(m+n)^p-m^p-n^p$ の偶奇と $(m+n)-m-n=0$ の偶奇は一致する。よって, A は偶数, つまり 2 で割り切れる。2 と p は互いに素なので以上より, A は $2p$ で割り切れる。

〔5〕

(1)　$X_1+X_2+X_3=4$ より, $E(X_1+X_2+X_3)=4$　$\therefore E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=4$

$E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)$ より, $E(X_n)=\frac{4}{3}\ (n=1,\ 2,\ 3)$

(2)「$X_2=i$, $X_3=j$」となるのは, 1, 2, 3, の球がそれぞれ $4-i-j$ 回, i 回, j 回取り出されるときなので,

$$P(X_2=i,\ X_3=j)=\frac{4!}{(4-i-j)!i!j!}\left(\frac{1}{3}\right)^{4-i-j}\left(\frac{1}{3}\right)^i\left(\frac{1}{3}\right)^j=\frac{8}{27(4-i-j)!i!j!}$$

(3)　$P(X_2X_3=1)=P(X_2=1,\ X_3=1)=\frac{4}{27}$

$P(X_2X_3=2)=P(X_2=1,\ X_3=2)+P(X_2=2,\ X_3=1)=\frac{8}{27}$

$P(X_2X_3=3)=P(X_2=1,\ X_3=3)+P(X_2=3,\ X_3=1)=\frac{8}{81}$

$P(X_2X_3=4)=P(X_2=2,\ X_3=2)=\frac{2}{27}$

(4)　(3)の結果より

$$E(X_2X_3)=1\times\frac{4}{27}+2\times\frac{8}{27}+3\times\frac{8}{81}+4\times\frac{2}{27}=\frac{4}{3}$$

講評

〔1〕A の固有値が a と -1 になることを利用する。直和分解を用いると速い。

〔2〕(2)で $f'(x)$ が因数分解できることに気付けるかが，ポイント。それでも計算量は多い。

〔3〕(1)で分数関数のまま微分すると手間がかかる。分母を払って 2 次不等式に持ち込んで時間を節約したい。

〔4〕(2)で p の倍数と偶数の証明に分けて考えることがポイント。

〔5〕(1)は期待値の線形性に気付けるかがポイント。(2)は反復試行の確率の応用。

〔全体〕

昨年度よりも大幅に難化した。どの問題も「工夫をしなければ解けない，あるいは時間がかかる」ようなものばかりである。それに加えて，〔4〕・〔5〕は抽象度も高い。合格には，６５％はとりたいところ。

medika 数学科