＜2009 年度　日本医科大学　入学試験　数学　問題＞

〔Ⅰ〕次の文章の空欄に適する数を解答欄に記せ。ただし，分数は既約分数の形で答えよ。

(1)　「2^n を 7 で割ると 1 余る」という性質をもつ最小の自然数 n は $\boxed{\text{ア}}$ である。したがって，2^{12} を 7 で割った余りは $\boxed{\text{イ}}$，2^{2009} を 7 で割った余りは $\boxed{\text{ウ}}$，$2^{2^{2009}}$ を 7 で割った余りは $\boxed{\text{エ}}$ である。ただし，a^{b^c} は「a の b^c 乗」を意味するものとする。

(2)　A と B が次のようなゲームをする。A はサイコロを 2 回投げて出た目の最大値 a を得点とし，B はサイコロを 1 回投げて出た目 b を得点とし，得点の大きい方を勝ち，同点なら引き分けとする。このとき，$a \leq 5$ となる確率は $\boxed{\text{オ}}$，$a \leq 4$ となる確率は $\boxed{\text{カ}}$，B が A に勝つ確率は $\boxed{\text{キ}}$，引き分けとなる確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(3)　O を原点とする数直線上に，点 P_n （x_n）（n＝0，1，2，･･･）を次のようにとる。
ただし，x_n は点 P_n の座標と表す。
$x_0 = 1$ とする。そして，n が偶数なら，線分 OP_n の中点を P_{n+1} とし，n が奇数なら，線分 P_nP_0 を 1:2 に内分する点を P_{n+1} とする。このとき，$m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対し，

$x_{2m+1} = \boxed{\text{ケ}}\,x_{2m}$　　$x_{2m+2} = \boxed{\text{コ}}\,x_{2m+1} + \boxed{\text{サ}}$ が成り立つ。したがって，

$x_{2m+2} = \boxed{\text{シ}}\,x_{2m} + \boxed{\text{ス}}$ となり，$\lim_{m\to\infty} x_{2m} = \boxed{\text{セ}}$　$\lim_{m\to\infty} x_{2m+1} = \boxed{\text{ソ}}$ を得る。

〔Ⅱ〕座標空間において，点 P は，円 $C_1 : \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$ 上の点で，原点 O を中心として，点 $(1,0,0)$ から C_1 上を角 θ だけ回ったところにある。ただし，この回転は，z 軸の正の方向からながめたときの反時計回りを正の方向とする。また点 Q は，円 $C_2 : \{(x, y, z) \mid y^2 + z^2 = \sin^2\alpha,\ x = 0\}$ 上の点で，O を中心として，点 $(0, |\sin\alpha|, 0)$ から C_2 上を角 $\theta + \alpha$ だけ回ったところにある。ただし，この回転は，x 軸の正の方向からながめたときの反時計回りを正の方向とし，α は定数であり，$\sin\alpha = 0$ のときは点 Q は原点 O であるとする。点 P と点 Q の間の距離を ℓ とする。

(1)　点 P の座標と点 Q の座標を，α，θ を使って表せ。(結果のみを記せ。)

(2)　ℓ^2 を，α，θ を使って表せ。ただし，θ を一度だけ使う式にすること。

(3)　α を定数として，θ が実数全体を動くとき，ℓ^2 の最小値を m，最大値を M とする。m と M を，α を使って表せ。(結果のみを記せ。)

(4)　θ が実数全体を動くとき，

(a)　つねに $1 \leqq \ell \leqq \sqrt{3}$ となるような α の条件は何か。$\sin\alpha$ の値の範囲として答えよ。

(b)　$\ell \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}$ を満たす θ が少なくともひとつ存在するような α の条件は何か。$\sin\alpha$ の値の範囲として答えよ。

(5)　(3)で考えた m が 0 となるような α に対し，$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} \ell\, d\theta$ を求めよ。

(注)　xy 平面に対する z 軸の正の方向は，x 軸の正の方向からながめたときの反時計回りに，x 軸を中心軸として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転すると，y 軸の正の部分が z 軸の正の部分に移るようにとるものとする。

〔Ⅲ〕

xy 平面において，0 ではない実数 a に対し，原点 0 を焦点，直線 $y = a$ を準線とする放物線を C_a とし，C_a の $x \geq 0$ を満たす部分を D_a とする。また，$a, b > 0$ に対し，2 曲線 D_a，D_{-b} の交点を $P_{a,-b}$ とする。

(1)　$P_{a,-b}$ の座標を求めよ。(結果のみ表せ。)

(2)　$a, b > 0$ に対し，2 曲線 D_a，D_{-b} および y 軸で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3)　条件

$$0 < r < a \quad \text{かつ} \quad 0 < r < b$$

を満たす a, b, r に対し，4 曲線 D_{a+r}，D_{a-r}，$D_{-(b+r)}$，$D_{-(b-r)}$ で囲まれる領域の面積を　$S(a, b, r)$ とするとき，$a, b > 0$ に対して定義される関数

$$f(a,b) = \lim_{r\to+0} \frac{1}{r^2} S(a, b, r)$$

を求めよ。

(4) $a, b > 0$ が条件 $f(a,b) < 4$ を満たして動くとき，点 $P_{a,-b}$ の存在範囲を求め xy 平面上に図示せよ。

＜日本医科大学　入学試験　数学　解答＞

〔Ⅰ〕

ア	イ	ウ	エ
3	1	4	4

オ	カ	キ	ク
$\dfrac{25}{36}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{55}{216}$	$\dfrac{1}{6}$

ケ	コ	サ	シ
$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$

ス	セ	ソ	
$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	

〔Ⅱ〕

(1) $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta, 0)$　$\mathrm{Q}(0, |\sin\alpha|\cos(\theta+\alpha), |\sin\alpha|\sin(\theta+\alpha))$

(2) $1+\sin^2\alpha+|\sin\alpha|\sin\alpha-|\sin\alpha|\sin(2\theta+\alpha)$

(3) $\mathrm{M}=1+\sin^2\alpha+|\sin\alpha|\sin\alpha+|\sin\alpha|$

$m=1+\sin^2\alpha+|\sin\alpha|\sin\alpha-|\sin\alpha|$

(4)

(a) $\sin\alpha=0$ または $\dfrac{1}{2}\leqq\sin\alpha\leqq\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$

(b) $-1\leqq\sin\alpha\leqq-\dfrac{2}{3}$

(5) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$

〔Ⅲ〕

(1) $\left(\sqrt{ab}, \dfrac{a-b}{2}\right)$

(2) $\dfrac{\sqrt{ab}}{3}(a+b)$　$(=T(a,\ b)$ とおく)

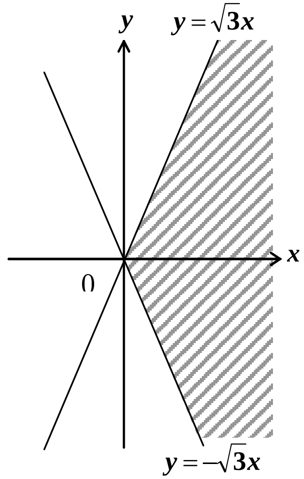
(3) $S(a,\ b,\ r)=T(a+r,b+r)-T(a+r,b-r)-T(a-r,b+r)+T(a-r,b-r)$

$=\dfrac{1}{3}\left\{(a+b)(\sqrt{a+r}-\sqrt{a-r})(\sqrt{b+r}-\sqrt{b-r})+2r\left(\sqrt{(a+r)(b+r)}-\sqrt{(a-r)(b-r)}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{4r^2(a+b)}{(\sqrt{a+r}+\sqrt{a-r})(\sqrt{b+r}+\sqrt{b-r})}+\dfrac{4(a+b)r^2}{\sqrt{(a+r)(b+r)}+\sqrt{(a-r)(b-r)}}\right\}$

よって，$f(a,\ b)=\lim\limits_{r\to+0}\dfrac{1}{r^2}S(a,\ b,\ r)=\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}$

(4)



$P_{a,-b}(x,\ y)$ とおくと，$x=\sqrt{ab}$，$y=\dfrac{a-b}{2}$

また，$f(a,\ b)<4$ より，$a+b<4\sqrt{ab}$

$\sqrt{4x^2+4y^2}<4x$　かつ　$x>0$

$x>0$　かつ　$-\sqrt{3}x<y<\sqrt{3}x$

よって，求める領域は下図の斜線部(境界を含まない)。

講評

〔Ⅰ〕全体的に標準レベル。(1) の後半は 7 で割った余りが周期していることに気付く必要がある。

〔Ⅱ〕煩雑な計算や場合分けものともしない処理能力が必要。(5) は不等式で評価する必要があるのでやや難。

〔Ⅲ〕(3) の $S(a,\ b,\ r)$ の計算で (2) を利用することに気づけるか, それと要領よく有理化して極限計算できるかがカギ。

全体の講評

昨年に比べて数学Ⅲの分量が増えて，全体のボリュームは増した。〔Ⅱ〕と〔Ⅲ〕の後半でどれだけ得点できるか，がポイント。合格には最低 70%は取りたいところ。

medika 数学科