※ 本日の東京女子医科大学の数学は、聞き取りによる解答作成であることをあらかじめご了承ください。

問題

1

(1) $\log_2 n+\log_2(\log_2 n)=11$ をみたす2以上の n が1つある。n を求めよ。

(2) $a_1=\cos\dfrac{\pi}{16}$,　$a_{n+1}=2a_n{}^2-1$　$(n=1, 2, 3, \cdots)$

このとき，a_{10} を求めよ。

2

(1) $\displaystyle\int_0^a \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\frac{12}{5}$　　このときの a の値を求めよ。

(2) x，y は0ではない。

$$x^2+y^2+\frac{4}{x^2}+\frac{4}{y^2}=8$$

このときの xy の最小値を求めよ。

3

$$\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{t}{2}} f(x)dx=t^2+3t-4$$

(1) このときの a の値を求めよ。ただし a は負の定数

(2) $f(x)$ を求めよ。

4

$-1\leqq t\leqq 1$,　$y=2tx-t^2-1$

(1) $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ を通るときの t の値を求めよ。

(2) 与えられた範囲内で t がどの値をとっても $(x,\ y)$ が点をとれない範囲（直線が通らない範囲）を，xy 平面上に図示しなさい。

解答

1

(1) $N=\log_2 n$ とおく（$n\geqq 2$）

$N+\log_2 N=11$　　……（＊）

$n\geqq 2$ のとき，$N\geqq 1$ であり，

$f(N)=N+\log_2 N$　　は明らかに増加関数であることと，

$f(8)=8+\log_2 8=11$　　より，

（＊）を満たす N は $N=8$ に限られる。　　$\therefore\ n=2^8=256$

(2) $a_2=2\cos^2\dfrac{\pi}{16}-1=\cos\dfrac{\pi}{8}$,　$a_3=2\cos^2\dfrac{\pi}{8}-1=\cos\dfrac{\pi}{4}$

$a_4=2\cos^2\dfrac{\pi}{4}-1=0$,　$a_5=2\cdot 0-1=-1$

$a_6=2\cdot(-1)^2-1=1$,　$a_7=2\cdot 1^2-1=1$　　$\cdots$

同様にくり返して，　$a_{10}=1$

2

(1) $\displaystyle\int_0^a \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\frac{12}{5}$

$\left[\dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\right]_0^a=\dfrac{12}{5}$,　　$\dfrac{1}{2}\left(e^a-e^{-a}\right)=\dfrac{12}{5}$

両辺に $10e^a$ をかけて整理すると，

$5e^{2a}-24e^a-5=0$

$(5e^a+1)(e^a-5)=0$

$e^a>0$ より，$e^a=5$

$\therefore\ a=\log 5$

医学部受験専門予備校・医学部受験個別指導　medika tokyo　medika osaka
東京 School　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1-31-10 Tel:03-5412-6585 Fax:03-5412-1650
大阪 School　大阪府大阪市北区豊崎 2-5-25　Tel:06-6359-5399 Fax:06-6359-5405

medika で合格目指そう！！　Yahoo!で検索 medika 検索

※ 本日の東京女子医科大学の数学は、聞き取りによる解答作成であることをあらかじめご了承ください。

(2)　$x^2+y^2+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{y^2}=8$　……（∗）

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{x}\right)^2+\left(y-\frac{2}{y}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x-\frac{2}{x}=0 \text{　かつ　} y-\frac{2}{y}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=2 \text{　かつ　} y^2=2$$

よって（∗）を満たす$(x,\ y)$は，$\left(\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2}\right)$　（複号任意）の 4 組だけである。

xy が最小となるのは$\left(\sqrt{2},\ -\sqrt{2}\right)$，$\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$のときで，$xy=-2$

$\boxed{3}$　$\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{t}{2}} f(x)dx=t^2+3t-4$

(1)　（与式）に $t=a$ を代入して，

$0=a^2+3a-4$

$(a-1)(a+4)=0$

$a<0$ より，$a=-4$

(2)　（与式）の両辺を t で微分すると，

$$f\left(\frac{t}{2}\right)\times\frac{1}{2}=2t+3$$

$$\therefore f\left(\frac{t}{2}\right)=4t+6$$

ここで，$\dfrac{t}{2}=x$ とすると，$f(x)=8x+6$

$\boxed{4}$

(1)　直線 $y=2tx-t^2-1$ の式に$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{4}\right)$を代入して，整理すると

$4t^2-12t+5=0$

$\therefore t=\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}$

$-1\leq t\leq 1$ より，$t=\dfrac{1}{2}$

(2)

直線 $y=2tx-t^2-1$ の式を t の二次方程式と見て

$t^2-2tx+y+1=0$

これが，$-1\leq t\leq 1$ の範囲に解を持たない条件を考えればよい。

$f(x)=t^2-2tx+y+1$ とおく。

$u=f(t)=(t-x)^2-x^2+y+1$

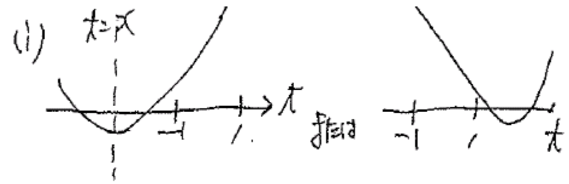
のグラフが以下の（ⅰ）～（ⅲ）のようになる条件を求める。

（ⅰ）

「$f(-1)=y+2x+2>0$」かつ

「$f(1)=y-2x+2>0$」かつ

「軸：$x\leq-1$ または $1\leq x$」



※　本日の東京女子医科大学の数学は、聞き取りによる解答作成であることをあらかじめご了承ください。

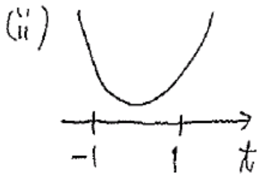
（ⅱ）

「$f(-1)=y+2x+2>0$」かつ

「$f(1)=y-2x+2>0$」かつ

「判別式：$\dfrac{D}{4}=x^2-y-1<0$」

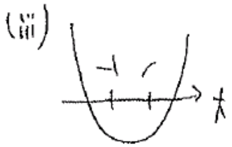
（かつ「軸：$-1<x<1$」）



（ⅲ）

「$f(-1)=y+2x+2<0$」かつ

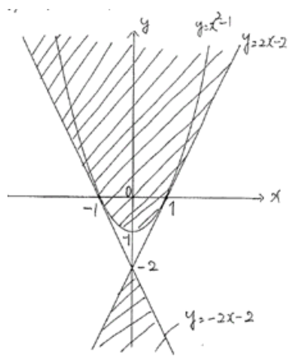
「$f(1)=y-2x+2<0$」



（ⅰ）～（ⅲ）を図示すると，

図の斜線部（境界線上を含まない）

$\left(y=\pm 2x-2\right.$は，$y=x^2-1$と点$(\pm 1, 0)$で接している。$\left.\right)$



講評

やや易化。簡単な問題と難しい問題の落差が大きい。2(2)と4(2)でどれだけ得点できたかが合否を分ける。その他の問題はいずれも教科書レベルであり，確実に正解したい。80～85%が合格ラインであろう。

1(1)n の増加関数であることを利用する。(2)順に a_2，a_3 と調べていく。倍角の公式に気付きたい。

2(2)対称式であり，相加・相乗平均の関係でもできるが，実数条件が早い。$(x,\ y)$の組は 4 つに限られるが，設問の「最小値」は受験生を惑わせたことだろう。

3(2)両辺を t で微分するとき，$\dfrac{1}{2}$ 倍を忘れないこと。

4(2)2 次方程式の解の配置に帰着させたい。領域はやや複雑であるが，与えられた直線が $y=x^2-1$ 上の点 $(t,\ t^2-1)$ における接線であることに気付けば，見通しがよくなる。

medika 数学科

二次対策は，「経験」と「情報量」の豊富なメディカで！！

女子医の 2 次試験対策を 2/6（月）に実施致します！

時間予約制ですので，下記までお電話にてお申込みください。

医学部受験専門予備校・医学部受験個別指導　medika tokyo　medika osaka

東京 School　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1-31-10 Tel:03-5412-6585 Fax:03-5412-1650

大阪 School　大阪府大阪市北区豊崎 2-5-25　Tel:06-6359-5399 Fax:06-6359-5405

medika で合格目指そう！！　Yahoo!で検索　medika　検索