medika 作成　数学　解・答・速・報

東京女子医科大学　入学試験　　2009年 2月2日実施

※本日の東京女子医科大学の数学は、聞き取り問題による解答作成であることをあらかじめご了承ください。

1

$f(x)=x^3-x$，$g(x)=x^2+a$ に対し，方程式 $f(g(x))=0$ が，相異なる 4 個の実数解を持つような a の範囲を求めよ。

解答

$f(x)=x^3-x$，$g(x)=x^2+a$

$f(g(x))=0 \cdots *$　$\Leftrightarrow$　$\{g(x)+1\}g(x)\{g(x)-1\}=0$

$\Leftrightarrow$　$g(x)=-1$ または 0 または 1

であるから，$*$ が相異なる 4 つの実数解を持つためには，

$y=g(x)$ のグラフが，3 直線 $y=-1$，$y=0$，$y=1$

と合計 4 点を共有すればよい。

よってグラフより，$\underline{\underline{-1<a<0}}$

2

O（0，0，0），A（1，0，0），B（1，1，0），C（1，1，1）のとき，P（x，x，x）$\left(0<x\leq\frac{1}{2}\right)$ が，直線 OC に垂直な平面上にあり，またこの平面と，線分 OA と線分 AB でできる折れ線との交点を Q とする。PQ の長さを $f(x)$ とするとき，

（a）$f\left(\frac{1}{3}\right)$ を求めよ。

（b）$f\left(\frac{1}{2}\right)$ を求めよ。

（c）$y=f(x)\left(0<x\leq\frac{1}{2}\right)$ のグラフ概形を図示せよ。

解答

P を通って直線 OC に垂直な平面 π と，x 軸および直線 AB との交点をそれぞれ $\mathrm{X}(t,0,0)$，$\mathrm{Y}(1,s,0)$ とおくと，$\pi\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{PX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PY}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$　$\therefore$　$t=3x$，$s=3x-1$

（a）　$x=\frac{1}{3}$ のとき，Q = X = Y で Q(1，0，0)

より $f\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{3}}}$

（b）　$x=\frac{1}{2}$ のとき　Q = Y で $\mathrm{Q}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)$

より $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

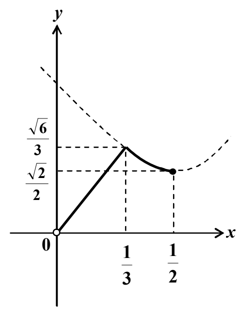
（c）（ⅰ）$0<x\leq\frac{1}{3}$ のとき，Q =X で Q $(3x,\ 0,\ 0)$

よって，$f(x)=\sqrt{(x-3x)^2+x^2+x^2}=\underline{\underline{\sqrt{6}x}}$

（i）$\frac{1}{3}<x\leq 1$ のとき，Q=Y で Q $(1,\ 3x-1,\ 0)$

よって，$f(x)=\sqrt{(x-1)^2+\{x-(3x-1)\}^2+x^2}=\sqrt{6x^2-6x+2}$

以上より，$y=f(x)$ のグラフは次図（(0，0) を除く）



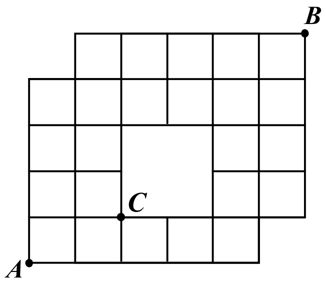
※本日の東京女子医科大学の数学は、聞き取り問題による解答作成であることをあらかじめご了承ください。

3

図のように 90° の角をなす線分たちで作られるマス目上に，それぞれ点 A，点 B，点 C がある。以下の問に答えよ。

(a) 点 A から点 B までの最短経路はいくつあるか。

(b) 点 A から点 B までの最短経路で，必ず点 C を通るものはいくつあるか。



解答

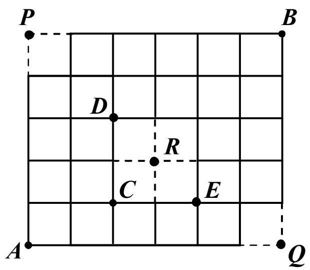
(1) 点 P，Q，R を図のように設ける。

$A \to B$ までの最短経路の総数は

（P，Q，R を通れる場合の総数）

－{（P を通る総数）＋（Q を通る総数）＋（R を通る総数)}

$= {}_{11}C_5 - (1+1+{}_5C_2 \cdot {}_6C_3) = 462 - (1+1+200) = \underline{\underline{260}}$ 通り



(2) 図のように点 D，E を設ける。

C を通る通り方は次のいずれか。

$A \to C \to D \to B$ を通る通り方：${}_3C_1 \cdot {}_6C_2 = 45$ 通り

$A \to C \to E \to B$ を通る通り方：${}_3C_1 \cdot {}_6C_2 = 45$ 通り

よって求める最短経路　45 + 45 $= \underline{\underline{90}}$ 通り

4

$\alpha = \int_1^2 \frac{x^2+2x+2}{x(x+1)(x+2)}dx$ があり，e^α は有理数となる。その有理数を求めよ。

解答

$$\alpha = \int_1^2 \frac{x^2+2x+2}{x(x+1)(x+2)}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \left[\log\left|\frac{x(x+2)}{x+1}\right|\right]_1^2 = \log\frac{8}{3} - \log\frac{3}{2} = \log\frac{16}{9}$$

よって，$\underline{\underline{e^\alpha = \frac{16}{9}}}$

講評

1 方程式の解の個数を，グラフの交点の個数に言い換えられるかがポイント。

2 平面と，x 軸および直線 AB との交点を求められるかがカギ。あとは場合分けするだけ。

3 典型的な最短経路の場合の数の問題。

4 部分分数分解してから積分計算すればよい。

全体：全体の問題の質・量は共に昨年並み。3，4は典型的な問題なので確実に得点したい。

1，2で差がつくと思われる。2，3については少し古い過去問に類題があり，それを解いた人は楽に解けたかもしれない。合格ラインは 75%程度か。

medika 数学科