[I]

(i)	(1) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$	(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(ii)	(3) $(k,\quad k)$	(4) $\frac{1}{2}$
(iii)	(5) $\frac{k\vec{a}+k\vec{b}}{k+1}$	(6) $k=\sqrt{3}-1$

[II]

(i)	(1) $4+k$	(2) $\frac{5}{2}$
(ii)	(3) (32, 46)	(4) 125055

講評

全般的に典型的で基本から標準問題ばかりで，特に難しい所はないと思われる。90 分という時間も問題の量・質に対し，十分であるので，計算ミスやケアレスミスに注意せねばならない。

合格ラインは 80%を超える高得点での争いとなるであろう。

[I]は小問集合。(2) PQ が最小になるときの P の座標は，図形的考察から，簡単な計算で求められる。

[II]（ｉ）a の値は，k の値で場合分けが必要となることに気がつきたい。（ii）群数列としては，定番の問題である。

[III]（ii）（ｉ)で求めた $x=a(=1)$ での接線が，x 軸になっていることに注意して，グラフの概形を思い浮かべられれば簡単な計算で求められることが分かる。

medika 数学科

[III]

(i) 曲線 C 上の点 $\left(t, \frac{(\log t)^2}{t}\right)$ とおくと，

$f'(x)=\frac{\log x(2-\log x)}{x^2}$ により，接線の式は

$$y=\frac{\log t(2-\log t)}{t^2}(x-t)+\frac{(\log t)^2}{t}$$

これが原点を通るから

$$0=\frac{\log t(2-\log t)}{t^2}(0-t)+\frac{(\log t)^2}{t}$$

$$\leftrightarrow 2(\log t)(\log t-1)=0$$

$$\leftrightarrow t=1,\quad e$$

よって $a=1,\quad b=e$

また，点 Q $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ における法線の式は，

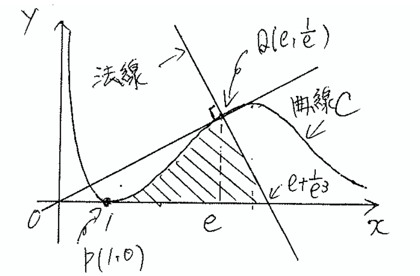
$f'(e)=\frac{1}{e^2}$ より傾き $-e^2$

$$y=-e^2(x-e)+\frac{1}{e}$$

$$\therefore y=-e^2x+e^3+\frac{1}{e} \qquad \cdots(\text{答})$$

(ii) (ｉ)の結果を用いて囲まれる部分の概形は下図の斜線部分

求める面積を S とおくと，



$$S=\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}dx+\frac{1}{2}\times\frac{1}{e^3}\times\frac{1}{e}$$

ここで $t=\log x$ と置換すると

$dt=\frac{dx}{x}$ 　$\begin{array}{c|c} x & 1\to e \\ \hline t & 0\to 1 \end{array}$ により

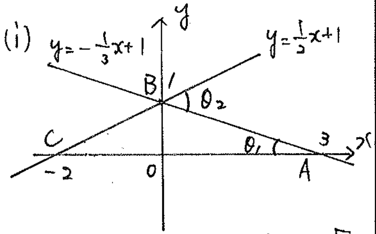
$$S=\int_0^1 t^2dt+\frac{1}{2e^4}=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1+\frac{1}{2e^4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2e^4} \qquad \cdots(\text{答})$$

医学部受験専門予備校・医学部受験個別指導　medika tokyo　medika osaka
東京 School　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1-31-10 Tel:03-5412-6585 Fax:03-5412-1650
大阪 School　大阪府大阪市北区豊崎 2-5-25　Tel:06-6359-5399 Fax:06-6359-5405

解説

[I]

(i)



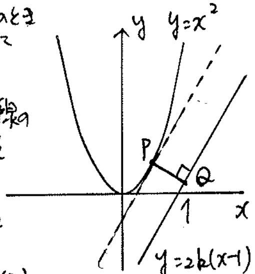
上図より $\cos\theta_1=\frac{OA}{AB}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\underline{\frac{3\sqrt{10}}{10}}_{(1)}$

θ_2は、$\overrightarrow{BA}$と$\overrightarrow{CB}$のなす角で

$$\cos\theta_2=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{CB}|}=\frac{3\cdot2+(-1)\cdot1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}$$

$$=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{(2)}$$

(ii) PQが最小のとき右図のようになるので、点Pでの接線の傾きが $2k$ となる。



$y'=2x=2k$

$\therefore\ x=\underline{k}_{(3)}$

このとき PQの方程式は

$$y=-\frac{1}{2k}(x-k)+k^2$$

$$=-\frac{1}{2k}x+k^2+\frac{1}{2}$$

この直線と $y=x^2$ の交点のx座標は、

$$x^2=-\frac{1}{2k}x+k^2+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ (x-k)\left(x+k+\frac{1}{2k}\right)=0$$

$$\therefore\ x=k,\ -k-\frac{1}{2k}$$

よって、PQと曲線Cで囲まれる部分の面積Sは、

$$S=\frac{1}{6}\left\{k-\left(-k-\frac{1}{2k}\right)\right\}^3$$

$$=\frac{1}{6}\left(2k+\frac{1}{2k}\right)^3$$

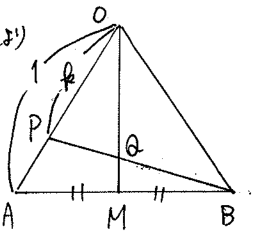
$k>0$ なので、相加・相乗平均の関係から

$$2k+\frac{1}{2k}\geqq2\sqrt{2k\cdot\frac{1}{2k}}=2$$

等号は、$2k=\frac{1}{2k}=1$ より $k=\underline{\frac{1}{2}}_{(4)}$ のとき

(このとき Sは最小値 $\frac{4}{3}$ をとる)

(iii) メネラウスの定理より



$$\frac{k}{1-k}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{MQ}{QO}=1$$

$\therefore\ MQ:QO$

$=1-k:2k$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{2k}{1-k+2k}\cdot\overrightarrow{OM}$$

$$=\underline{\frac{k\vec{a}+k\vec{b}}{1+k}}_{(5)}$$

$|\overrightarrow{OP}|=k$

$$|\overrightarrow{OQ}|=\frac{2k}{1+k}|\overrightarrow{OM}|=\frac{2k}{1+k}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}k}{1+k}$$

よって、$k=\frac{\sqrt{3}k}{1+k}$ より $k=0,\ \sqrt{3}-1$

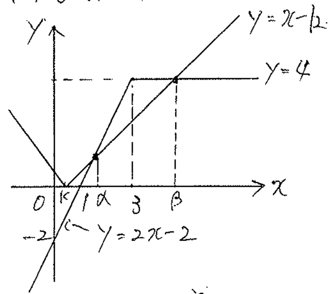
Pは辺OA上なので、$k=\underline{\sqrt{3}-1}_{(6)}$

[II] (i)

与式より $|x-k|=x+1-|x-3|$

ここで $y=|x-k|\ (0<k<3)$ および $y=x+1-|x-3|$ の交点のx座標を求めることにより与式をみたす2解を考える。

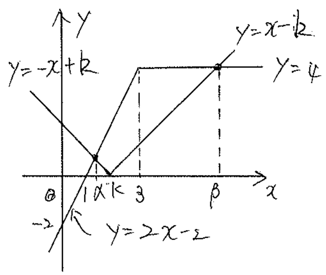
(ア) $0<k<1$ のとき



上図のように交点が決まり、

$$\alpha=2-k,\quad\beta=4+k$$

(イ) $1\leqq k<3$ のとき



(ア)と同様にして

$$\alpha=\frac{k+2}{3},\quad\beta=4+k$$

(ア)(イ)より　$\beta=\boxed{4+k}^{(1)}$

また、$\beta-\alpha=5$ をみたすkの値は、(i)の場合について調べると、

(ア) $0<k<1$ のとき

$$\beta-\alpha=4+k-(2-k)=5$$

$k=\frac{3}{2}$ となり不適

(イ) $1\leqq k<3$ のとき

$$\beta-\alpha=4+k-\frac{k+2}{3}=5$$

$k=\frac{5}{2}$ となり適する

従って　$k=\boxed{\frac{5}{2}}^{(2)}$

[II] (ii)

奇数列の第k項目の数をa_kとおくと

$$a_k = 2k-1 \quad \text{——①}$$

ここで第n群の1番目の奇数の項番号をlとすると

$$l = 1+3+5+\cdots+\{2(n-1)-1\}+1$$
$$= n^2-2n+2$$

よって①より

$$a_l = 2(n^2-2n+2)-1$$
$$= 2n^2-4n+3$$

2013が第n群に含まれるとすると

$$2n^2-4n+3 \leqq 2013 < 2(n+1)^2-4(n+1)+3 \quad \text{——②}$$

をみたす自然数を求める。

$n=32$のとき $1923 \leqq 2013 < 2049$ となり

②式をみたす。また、このとき第32群の第1番目の数は、1923となるので

2013は、$\dfrac{2013-1923}{2}+1 = 46$ より 第32群の46番目の数

$$\therefore (n, m) = \boxed{(32, 46)} \quad (3)$$

また、2013が属する第32群の奇数の総和Sとおくと

初項1923、項数$32\times2-1=63$、公差2の等差数列の和より

$$S = \frac{63\{2\times1923+(63-1)\times2\}}{2} = \boxed{125055} \quad (4)$$